ใบความรู้ คณิตศาสตร์ (พื้นฐาน)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

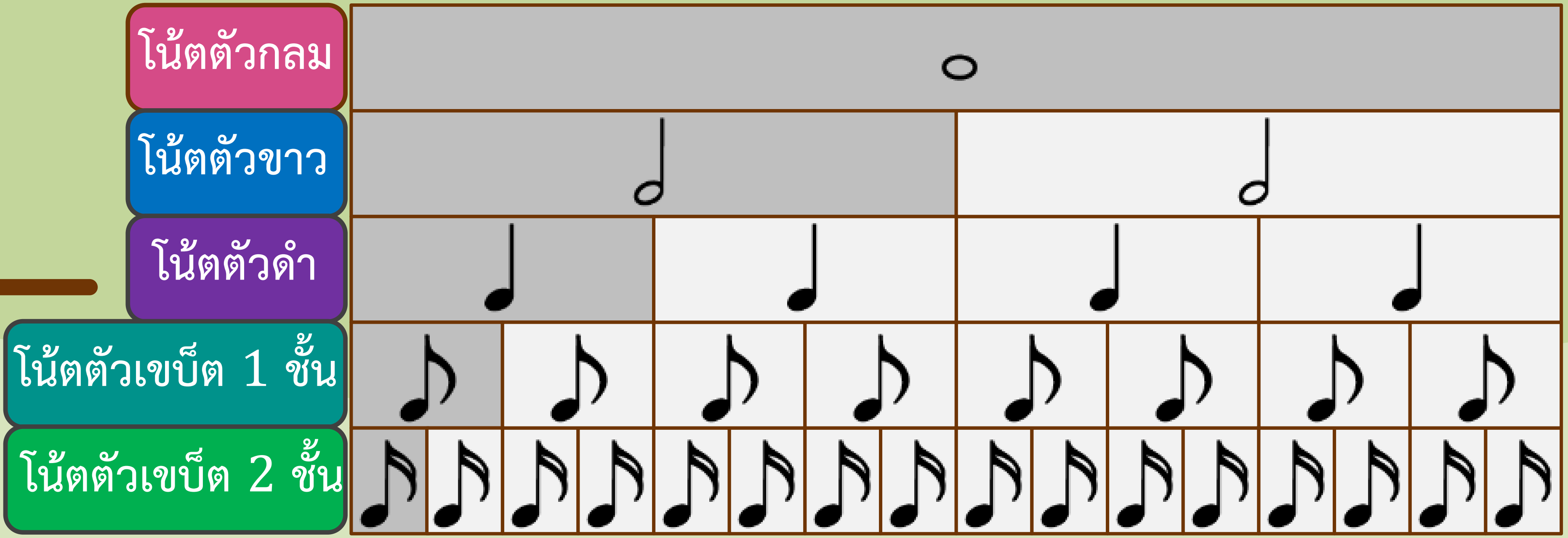
ลำดับและอนุกรม

ตัวชี้วัด

- เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้ (ค 1.2 ม.5/2)

สอนโดย ครูดรรชนี ดอกดวง

ตัวโน้ต ในทางดนตรีเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้บอกระดับเสียงและความยาวเสียง ซึ่งระดับเสียงของตัวโน้ตวัดได้จากตำแหน่งที่วางอยู่**บนบรรทัด 5 เส้น** และความยาวเสียงวัดได้จากลักษณะของตัวโน้ต ซึ่งสามารถเปรียบเทียบความยาวเสียงของตัวโน้ตแต่ละตัวกับโน้ตตัวกลมได้ ดังนี้



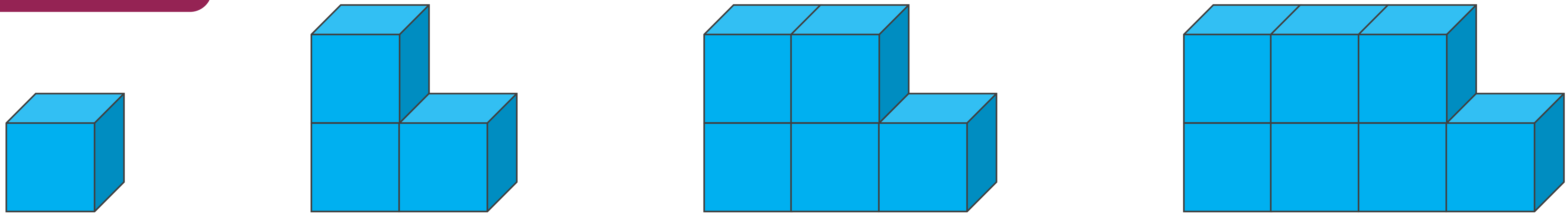
จะเห็นได้ว่า

โน้ตตัวขาว	มีความยาวเสียงเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ของ	โน้ตตัวกลม
โน้ตตัวดำ	มีความยาวเสียงเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ของ	โน้ตตัวกลม
โน้ตตัวเขบ็ต 1 ชั้น	มีความยาวเสียงเท่ากับ $\frac{1}{8}$ ของ	โน้ตตัวกลม
โน้ตตัวเขบ็ต 2 ชั้น	มีความยาวเสียงเท่ากับ $\frac{1}{16}$ ของ	โน้ตตัวกลม

นักเรียนทราบหรือไม่ว่า ความยาวของตัวโน้ตแต่ละตัวมีความสัมพันธ์กันอย่างไร?

ในการหาความสัมพันธ์ของความยาวเสียงตัวโน้ตแต่ละตัว ต้องใช้ความรู้ “เรื่อง ลำดับและอนุกรม” ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาต่อไปนี้

ลำดับ



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4

จะเห็นได้ว่า ความสัมพันธ์ของลำดับของรูป และจำนวนลูกบาศก์ในแต่ละรูปเป็นฟังก์ชันที่มี $\{1, 2, 3, 4\}$ เป็นโดเมน และมี $\{1, 3, 5, 7\}$ เป็นเรนจ์ เมื่อพิจารณาลำดับของรูปและจำนวนลูกบาศก์ในกรณีทั่วไปได้ ดังนี้

ลำดับของรูป	1	2	3	4	...	n	...
จำนวนลูกบาศก์	1	3	5	7	...	$2n - 1$	...

จากตาราง จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก

คือ $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots\}$

ลำดับ

โดยทั่วไป การเขียนลำดับจะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน และใช้ a แทน สัญลักษณ์ของลำดับ ดังนี้

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ → **ลำดับจำกัด**

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ → **ลำดับอนันต์**

เรียก

a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

$\vdots$

a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

การเขียนลำดับนอกจากเขียนแบบแจกแจงพจน์แล้ว ยังสามารถเขียนเฉพาะพจน์ทั่วไป พร้อมทั้งระบุสมาชิกในโดเมน เช่น

ลำดับ $3, 6, 9, 12, 15, 18$ เขียนแทนด้วย $a_n = 3n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ลำดับ $3, 7, 11, 15, \ldots, 4n - 1, \ldots$ เขียนแทนด้วย $a_n = 4n - 1$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

ตัวอย่างที่ 1 ให้หาห้าพจน์แรกของ $a_n = 2n - 4$

วิธีทำ

จาก $a_n = 2n - 4$

จะได้
$$a_1 = 2(1) - 4 = -2$$
$$a_2 = 2(2) - 4 = 0$$
$$a_3 = 2(3) - 4 = 2$$
$$a_4 = 2(4) - 4 = 4$$
$$a_5 = 2(5) - 4 = 6$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับนี้ คือ $-2, 0, 2, 4, 6$

ตัวอย่างที่ 2

ให้หาพจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $0, 1, 3, 6, \ldots$ 2) $-2, -3, -6, -11, \ldots$ 3) $1, 4, 16, 64, \ldots$ 4) $-729, -243, -81, -27, \ldots$

วิธีทำ

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ

1)

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$$

ตัวอย่างที่ 2

ให้หาพจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $0, 1, 3, 6, \ldots$ 2) $-2, -3, -6, -11, \ldots$ 3) $1, 4, 16, 64, \ldots$ 4) $-729, -243, -81, -27, \ldots$

วิธีทำ

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ

2)

-2	-3	-6	-11	-18	-27
-1	-3	-5	-7	-9	

ตัวอย่างที่ 2

ให้หาพจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $0, 1, 3, 6, \ldots$ 2) $-2, -3, -6, -11, \ldots$ 3) $1, 4, 16, 64, \ldots$ 4) $-729, -243, -81, -27, \ldots$

วิธีทำ

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ

3)

$$1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16 \xrightarrow{\times 4} 64 \xrightarrow{\times 4} 256 \xrightarrow{\times 4} 1{,}024$$

ตัวอย่างที่ 2

ให้หาพจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $0, 1, 3, 6, \ldots$ 2) $-2, -3, -6, -11, \ldots$ 3) $1, 4, 16, 64, \ldots$ 4) $-729, -243, -81, -27, \ldots$

วิธีทำ

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ

4)

$$-729 \xrightarrow{\div 3} -243 \xrightarrow{\div 3} -81 \xrightarrow{\div 3} -27 \xrightarrow{\div 3} -9 \xrightarrow{\div 3} -3$$

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่มีผลต่างของพจน์ที่ $n + 1$ กับพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวเสมอ
และเรียกผลต่างที่เป็นค่าคงตัวนั้นว่า "ผลต่างร่วม" เขียนแทนด้วย d

---

พจน์ทั่วไปหรือพจน์ n ของลำดับเลขคณิต

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

เมื่อ	a_1	คือ	พจน์ที่ 1 ของลำดับเลขคณิต
	d	คือ	ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต
	n	คือ	ลำดับที่ n ของลำดับเลขคณิต
และ	a_n	คือ	พจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 3 ให้เขียนสี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต $-5, -2, 1, \ldots$

วิธีทำ ลำดับเลขคณิตนี้มี $a_1 = -5$ และผลต่างร่วม $d = -2 - (-5) = 3$

จะได้

$$
\begin{aligned}
a_4 &= a_3 + d = 1 + 3 = 4 \\
a_5 &= a_4 + d = 4 + 3 = 7 \\
a_6 &= a_5 + d = 7 + 3 = 10 \\
a_7 &= a_6 + d = 10 + 3 = 13
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $4, 7, 10, 13$

ตัวอย่างที่ 4 ให้หาพจน์ที่ 50 ของลำดับเลขคณิต $-2, 1, 4, 7, \ldots$

วิธีทำ ลำดับเลขคณิตนี้มี $a_1 = -2$ และผลต่างร่วม $d = 1 - (-2) = 3$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_{50} = -2 + (50 - 1)(3)$

$= -2 + 147$

$= 145$

ดังนั้น พจน์ที่ 50 ของลำดับนี้ คือ 145

ตัวอย่างที่ 5 ให้หาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต $4, 2, 0, -2, \ldots$

วิธีทำ ลำดับเลขคณิตนี้มี $a_1 = 4$ และผลต่างร่วม $d = 2 - 4 = -2$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_n = 4 + (n - 1)(-2)$

$= 4 - 2n + 2$

$= 6 - 2n$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $a_1 = 6 - 2n$

VDO Clip

ตัวอย่างที่ 6 อาซาต้องการซื้อโทรศัพท์มือถือเครื่องหนึ่งราคา 13,500 บาท โดยเดือนแรกออมเงิน 1,500 บาท และในเดือนถัดไปอาซาออมเงินเพิ่มขึ้นทุกเดือน เดือนละ 1,000 บาท ให้หาว่าอาซาต้องออมเงินเพื่อซื้อโทรศัพท์มือถือเครื่องนี้เป็นระยะเวลากี่เดือน

วิธีทำ เขียนลำดับเลขคณิตแทนเงินออมที่อาซาเก็บในแต่ละเดือนได้ ดังนี้

$1{,}500, 2{,}500, 3500, \dots, 13{,}500$ โดยที่ $a_1 = 1{,}500, d = 1{,}000$ และ $a_n = 13{,}500$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $13{,}500 = 1{,}500 + (n-1)(1{,}000)$

$13{,}500 = 1{,}500 + 1{,}000n - 1{,}000$

$1{,}000n = 13{,}000$

$n = 13$

ดังนั้น อาซาต้องออมเงินเพื่อซื้อโทรศัพท์มือถือเครื่องนี้เป็นระยะเวลา 13 เดือน

ตัวอย่างที่ 6

อาซาต้องการซื้อโทรศัพท์มือถือเครื่องหนึ่งราคา 13,500 บาท โดยเดือนแรกออมเงิน 1,500 บาท และในเดือนถัดไปอาซาออมเงินเพิ่มขึ้นทุกเดือน เดือนละ 1,000 บาท ให้หาว่าอาซาต้องออมเงินเพื่อซื้อโทรศัพท์มือถือเครื่องนี้เป็นระยะเวลากี่เดือน

วิธีทำ เขียนลำดับเลขคณิตแทนเงินออมที่อาซาเก็บในแต่ละเดือนได้ ดังนี้

$1{,}500, 2{,}500, 3500, \ldots, 13{,}500$ โดยที่ $a_1 = 1{,}500, d = 1{,}000$ และ $a_n = 13{,}500$

จาก $$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

จะได้ $$n = \frac{13{,}500 - 1{,}500}{1{,}000} + 1$$

$$= 12 + 1$$

$$= 13$$

ในการหาจำนวนพจน์สามารถหาได้จากสูตร

$n = \frac{a_n - a_1}{d}$ ซึ่งได้จากการย้ายข้างของสมการ $a_n = a_1 + (n - 1)d$

ดังนั้น อาซาต้องออมเงินเพื่อซื้อโทรศัพท์มือถือเครื่องนี้เป็นระยะเวลา 13 เดือน

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ กับพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวเสมอ และเรียกอัตราส่วนที่เป็นค่าคงตัวนั้นว่า "อัตราส่วนร่วม" เขียนแทนด้วย r

---

พจน์ทั่วไปหรือพจน์ n ของลำดับเรขาคณิต

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

เมื่อ a_1 คือ พจน์ที่ 1 ของลำดับเรขาคณิต

r คือ อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต

n คือ ลำดับที่ n ของลำดับเรขาคณิต

และ a_n คือ พจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 7 ให้เขียนสี่พจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิต $-1, 2, -4, \ldots$

วิธีทำ ลำดับเรขาคณิตนี้มี $a_1 = -1$ และอัตราส่วนร่วม $r = \frac{2}{-1} = -2$

จะได้
$$a_4 = a_3r = (-4)(-2) = 8$$
$$a_5 = a_4r = 8(-2) = -16$$
$$a_6 = a_5r = (-16)(-2) = 32$$
$$a_7 = a_6r = 32(-2) = -64$$

ดังนั้น สี่พจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $8, -16, 32, -64$

ตัวอย่างที่ 8 ให้หาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต $-32, 16, -\frac{1}{8}, \ldots$

วิธีทำ ลำดับเรขาคณิตนี้มี $a_1 = -32$ และอัตราส่วนร่วม $r = \frac{16}{-32} = -\frac{1}{2}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ว่า $a_{10} = a_1 r^{10-1}$

$= a_1 r^9$

$= (-32)\left(-\frac{1}{2}\right)^9$

$= \frac{1}{16}$

ดังนั้น พจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1}{16}$

ตัวอย่างที่ 9 ให้หาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$

วิธีทำ ลำดับเรขาคณิตนี้มี $a_1 = 3$ และอัตราส่วนร่วม $r = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

จาก $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\quad a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 10

ในปี พ.ศ. 2561 ประชากรในอำเภอหนึ่งของจังหวัดเชียงรายมี 53,500 คน ถ้าในแต่ละปีประชากรในอำเภอนี้เพิ่มขึ้นปีละ 2% ให้หาว่าในปี 2568 ประชากรในอำเภอนี้มีทั้งหมดกี่คน

วิธีทำ

จำนวนประชากรในปี พ.ศ. 2561 $= 53{,}500$ คน

จำนวนประชากรในปี พ.ศ. 2562 $= 53{,}500 \times \frac{102}{100}$ คน

จำนวนประชากรในปี พ.ศ. 2563 $= 53{,}500 \times \left(\frac{102}{100}\right)^2$ คน

$\vdots$

จำนวนประชากรในปี พ.ศ. 2568 $= 53{,}500 \times \left(\frac{102}{100}\right)^7$ คน

$\approx 61{,}454.68$

$\approx 61{,}455$

แนะแนวคิด

ให้ จำนวนประชากรปี พ.ศ. 2561 แทน พ.ศ. 1

จำนวนประชากรปี พ.ศ. 2562 แทน พ.ศ. 2

$\vdots$

จะได้ว่า จำนวนประชากรในปี พ.ศ. n

$$= 53{,}500 \times \left(\frac{102}{100}\right)^{n-1}$$

ดังนั้น ในปี 2568 ประชากรในอำเภอนี้มีประมาณ 61,455 คน

ลำดับและอนุกรมมีความสัมพันธ์กัน โดยเมื่อนำพจน์ทุกพจน์ของลำดับมาบวกกัน จะเรียกว่า **อนุกรม**

ลำดับจำกัด	ลำดับอนันต์
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$	$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$
$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$	$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$
อนุกรมจำกัด	อนุกรมอนันต์
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

ตัวอย่างที่ 11

ให้หาค่าของ 1) $\sum_{i=1}^{10} 4$ 2) $\sum_{i=2}^{8} (3i - 2)$ 3) $\sum_{k=1}^{4} (3k - 2)^2$

วิธีทำ

$$1)\ \sum_{i=1}^{10} 4 = \underbrace{4 + 4 + 4 + \cdots + 4}_{\text{มี 10 พจน์}}$$

$$= 4(10)$$

$$= 40$$

ตัวอย่างที่ 11 ให้หาค่าของ 1) $\sum_{i=1}^{10} 4$ 2) $\sum_{i=2}^{8} (3i - 2)$ 3) $\sum_{k=1}^{4} (3k - 2)^2$

วิธีทำ

2) $\sum_{i=2}^{8} (3i - 2) = [3(2)-2]+[3(3)-2]+[3(4)-2]+[3(5)-2]+[3(6)-2]+[3(7)-2]$

$+[3(8)-2]$

$= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$

$= 91$

ตัวอย่างที่ 11

ให้หาค่าของ 1) $\sum_{i=1}^{10} 4$ 2) $\sum_{i=2}^{8} (3i - 2)$ 3) $\sum_{k=1}^{4} (3k - 2)^2$

วิธีทำ

$$3)\sum_{k=1}^{4} (3k - 2)^2 = [3(1) - 2]^2 + [3(2) - 2]^2 + [3(3) - 2]^2 + [3(4) - 2]^2$$

$$= 1 + 16 + 49 + 100$$

$$= 166$$

สมบัติของสัญลักษณ์แทนการบวก $\sum$

1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

ตัวอย่างที่ 12 ให้หาค่าของ 1) $\sum_{i=1}^{6}(4i + 2)$ 2) $\sum_{j=2}^{8}\left(\frac{2j - 1}{4}\right)$ 3) $\sum_{k=1}^{4}(3k - 2)^2$

วิธีทำ

$$1)\ \sum_{i=1}^{6}(4i + 2) = \sum_{i=1}^{6}4i + \sum_{i=1}^{6}2$$

$$= 4\sum_{i=1}^{6}i + 2(2)$$

$$= 4(1+2+3+4+5+6) + 12$$

$$= 4(21) + 12 = 96$$

ตัวอย่างที่ 12 ให้หาค่าของ 1) $\sum_{i=1}^{6}(4i+2)$ 2) $\sum_{j=2}^{8}\left(\frac{2j-1}{4}\right)$ 3) $\sum_{k=1}^{4}(3k-2)^2$

วิธีทำ

$$2)\ \sum_{j=2}^{8}\left(\frac{2j-1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left[\sum_{j=2}^{8}(2j-1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sum_{j=2}^{8}2j-\sum_{j=2}^{8}1\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\sum_{j=2}^{8}j-8(1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[2(1+2+3+4+5+6+7+8)-8]$$

$$= \frac{1}{4}[2(36)-8]$$

$$= \frac{1}{4}(64)$$

$$= 16$$

ตัวอย่างที่ 12

ให้หาค่าของ 1) $\sum_{i=1}^{6}(4i + 2)$ 2) $\sum_{j=2}^{8}\left(\frac{2j - 1}{4}\right)$ 3) $\sum_{k=1}^{4}(3k - 2)^2$

วิธีทำ

$$3)\ \sum_{k=1}^{4}(3k - 2)^2 = \sum_{k=1}^{4}(9k^2 - 12k + 4)$$

$$= \sum_{k=1}^{4}9k^2 - \sum_{k=1}^{4}12k + \sum_{k=1}^{4}4$$

$$= 9\sum_{k=1}^{4}k^2 - 12\sum_{k=1}^{4}k + 4(4)$$

$$= 9(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - 12(1 + 2 + 3 + 4) + 16$$

$$= 9(30) - 12(10) + 16$$

$$= 270 - 120 + 16$$

$$= 166$$

การคำนวณผลบวก n พจน์แรก ในรูป $\sum_{i=1}^{n} i$ $\sum_{i=1}^{n} i^2$ $\sum_{i=1}^{n} i^3$

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

ตัวอย่างที่ 13

ให้หาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3$

วิธีทำ

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} 8i^3 - 12i^2 + 6i - 1$

$$= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 - 12\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 12\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^2 + 6\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - n$$

ตัวอย่างที่ 13

ให้หาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1)^3$

วิธีทำ

จะได้ $$\sum_{i=1}^{10}(2i - 1)^3 = 8\left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2 - 12\left[\frac{10(10+1)(2(10)+1)}{6}\right] + 6\left[\frac{10(10+1)}{2}\right] - 10$$

$$= 24{,}200 - 4{,}620 + 330 - 10$$

$$= 19{,}900$$

ดังนั้น ผลบวก **10** พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3$ เท่ากับ **19,900**

อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมที่เกิดจากลำดับเลขคณิต เรียกว่า "อนุกรมเลขคณิต"
และมีผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$ เมื่อทราบค่า n, a_1 และ a_n

หรือ $$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$ เมื่อทราบค่า n, a_1 และ d

เมื่อ	a_1	คือ	พจน์ที่ 1 ของลำดับเลขคณิต
	a_n	คือ	พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต
	n	คือ	จำนวนพจน์ของอนุกรมเลขคณิต
	d	คือ	ผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิต
และ	S_n	คือ	ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 14 ให้หาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $-2+1+4+\ldots+3n-5+\ldots$

วิธีทำ

เนื่องจาก $a_1 = -2, d = 3$ และ $n = 20$

จาก $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

จะได้ $S_{20} = \frac{20}{2}[2(-2) + (20-1)(3)]$

$= 10[(-4) + 57]$

$= 530$

ดังนั้น ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 530

ตัวอย่างที่ 15 ให้หาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของอนุกรมเลขคณิต $12 + 9 + 6 + \ldots + (-42)$

วิธีทำ

เนื่องจาก $a_1 = 12$ และ $d = 3$

หาจำนวนพจน์จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้

$$-42 = 12 + (n - 1)(-3)$$

$$-42 = 12 - 3n + 3$$

$$-42 = -3n + 15$$

$$n = 19$$

ตัวอย่างที่ 15 ให้หาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของอนุกรมเลขคณิต $12 + 9 + 6 + \dots + (-42)$

วิธีทำ

หาผลบวกของ 19 พจน์ จาก $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

จะได้

$$
\begin{aligned}
S_{19} &= \frac{19[12 + (-42)]}{2} \\
&= \frac{19[-30]}{2} \\
&= 19(-15) \\
&= -285
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลบวกทั้ง 19 พจน์ของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ -285

อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมที่เกิดจากลำดับเรขาคณิต เรียกว่า "อนุกรมเรขาคณิต"
และมีอัตราส่วนของลำดับเรขาคณิตเป็นอัตราส่วนของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{หรือ} \quad S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

โดยที่ $r \neq 1$ เมื่อทราบค่า n, a_1 และ r

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \quad \text{หรือ} \quad S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

โดยที่ $r \neq 1$ เมื่อทราบค่า a_1, r และ a_n

เมื่อ a_1 คือ พจน์ที่ 1 ของอนุกรมเรขาคณิต

a_n คือ พจน์ที่ n ของอนุกรมเรขาคณิต

n คือ จำนวนพจน์ของอนุกรมเรขาคณิต

r คือ อัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิต

และ S_n คือ ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 16 ให้หาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $3 + 6 + 12 + \dots + 3(2)^{n-1} + \dots$

วิธีทำ

เนื่องจาก $a_1 = 3, r = 2$ และ $n = 20$

จาก
$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$= \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$
$$= 3(1{,}024 - 1)$$
$$= 3{,}069$$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 3,069

ตัวอย่างที่ 17 อนุกรมเรขาคณิตหนึ่งมี $a_1 = 81,\ a_2 = -54$ และ $a_n = 16$ ให้หา r, n และ S_n

วิธีทำ

เนื่องจาก $a_1 = 81$ และ $a_2 = -54$ จะได้ $r = \frac{-54}{81} = -\frac{2}{3}$

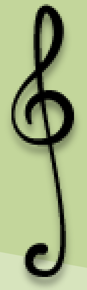
จาก
$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 r^{n-1} \\
16 &= 81\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
\frac{16}{81} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^4 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
n - 1 &= 4 \\
n &= 5
\end{aligned}$$

จาก $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$

จะได้
$$\begin{aligned}
S_5 &= \frac{81 - 16\left(-\frac{2}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} \\
&= \frac{\frac{275}{3}}{\frac{5}{3}} \\
&= 55
\end{aligned}$$

นักเรียนจำคำถามในตอนต้นได้ไหมคะ

“นักเรียนทราบหรือไม่ว่าความยาวเสียงของตัวโน้ตแต่ละตัว มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ?”



ความยาวเสียงของตัวโน้ตแต่ละตัว เมื่อนำมาเรียงกันจะได้ความยาว ดังนี้

$$1 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{4} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{8} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{16}$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้น ความยาวเสียงของตัวโน้ตตัวถัดไปจะลดลงเป็นครึ่งหนึ่งเสมอ

และเรียกความสัมพันธ์นี้ว่าเป็น “ลำดับเรขาคณิต”

นักเรียนได้รับความรู้เกี่ยวกับ “ลำดับและอนุกรม”

อย่างครบถ้วนแล้ว หวังว่านักเรียนจะนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริงได้นะคะ